

UNTERSUCHUNGEN VON ABGESCHLOSSENEN CUNNINGHAM-P-OPERATOREN

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Klaus H^ügin
aus Berlin

1977

UNTERSUCHUNGEN VON ABGESCHLOSSENEN CUNNINGHAM-P-OPERATOREN

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Klaus Hügin

aus Berlin



1. Gutachter : Professor Dr. G. Heller

2. Gutachter : Professor Dr. J. Fuchs

Tag der mündlichen Prüfung : 5 Dezember 1977

Tag der Promotion :

Die vorliegende Arbeit entstand im Anschluß an die Mitwirkung des Verfassers im Forschungsprojektschwerpunkt "Strukturtheorie reeller Banachräume". Dem Begründer und Leiter dieses Forschungsprojekts, Herrn Prof. Dr. Ehrhard Behrends, sowie Herrn Dr. Winfried Müller danke ich für anregende Diskussionen und wertvolle Hinweise. Mein besonderer Dank gilt ferner Frau Christa Siewert für ihre große Mühe und Geduld beim Schreiben dieses Skriptums.

I n h a l t

	Seite
1. Einleitung	5-14
1. 1. Vorbereitungen	5-12
1. 2. Übersicht	13-14
2. Ein Funktionalalkalkül für Operatoren der Klasse $C_p^a(B_p)$	15-24
3. Die Eindeutigkeit der Zerlegung der Eins	25-32
4. Untersuchung des gemeinsamen Definitionsbereiches von $C_p^a(B_p)$	33-43
5. Charakterisierung von $C_p^a(B_p)$	44-48
6. Literaturverzeichnis	49-50
7. Lebenslauf	51

1. Einleitung

1.1. Vorbereitungen

Im folgenden sei X immer ein reeller Banachraum, $1 \leq p < \infty$. Eine lineare Abbildung $E : X \rightarrow X$ heißt L^p -Projektion auf X , wenn $E^2 = E$ und $\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|x - Ex\|^p$ für jedes $x \in X$ gilt. L^p -Projektionen sind also stetig mit $\|E\| \leq 1$.

Bilder von L^p -Projektionen heißen L^p -Summanden; L^p -Projektionen und L^p -Summanden entsprechen sich eineindeutig. (s. [Be 1]). L^p -Summanden sind insbesondere abgeschlossene, komplementierte Unterräume, und ist $J_E = EX$ L^p -Summand, so ist dessen Komplement der L^p -Summand $J_E^\perp = (Id - E)(X)$, so daß $X = J_E \oplus_p J_E^\perp$ (d.h. zu $x \in X$ existiert eindeutig ein $y \in J_E$, $z \in J_E^\perp$ mit $x = y + z$ und $\|x\|^p = \|y\|^p + \|z\|^p$) gilt.

Unter einer Booleschen Algebra B_p von L^p -Projektionen verstehen wir eine Menge von kommutierenden L^p -Projektionen (da deren Vertauschbarkeit für $p \neq 2$ gesichert ist [Be 1], ist diese Voraussetzung nur für $p = 2$ einschränkend), die 0 und Id enthält und mit E und F auch die Operatoren EF , $E + F - EF$ und $Id - E$. Aus der Kommutativität folgt, daß EF und $E + F - EF$ (s. [C-S], [Ev], und beachte, daß L^p -Projektionen spezielle Beispiele von F -Projektionen sind) wieder L^p -Projektionen sind.

Insbesondere ist die Gesamtheit aller L^p -Projektionen im Falle $p \neq 2$ eine Boolesche Algebra; wir bezeichnen sie mit $B_p(X)$. B_p heißt vollständig (bzw. σ -vollständig), wenn für jedes wachsende oder fallende Netz $(E_i)_{i \in I}$ (jede wachsende oder fallende Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$) in B_p ein $E \in B_p$ existiert mit $E_i \rightarrow E$ ($E_n \rightarrow E$) in der starken Operator-topologie. $B_p(X)$ ist, wieder als Folgerung aus den Ergebnissen von [C-S], eine vollständige Boolesche Algebra von L^p -Projektionen im Falle $p \neq 2$. In diesem Sinne vollständige Boolesche Algebren B_p sind auch als abstrakte Boolesche Algebren vollständig bzgl. der induzierten Ordnung (d.h. wenn $E \leq F \Leftrightarrow EF = E$ definiert wird; es ist also $\sup(E, F) = E + F$ für E, F disjunkt, d.h. $EF = 0$).

Im folgenden sei B_p eine feste vollständige Boolesche Algebra von L^p -Projektionen auf X , geordnet durch $E \leq F \Leftrightarrow EF = E$. In dieser Ordnung ist $EF = E \wedge F$ und $E + F - EF = E \vee F$.

Nach dem Satz von Stone gibt es zu B_p einen kompakten und extrem unzusammenhängenden Raum $\Omega(B_p)$, so daß B_p isomorph zur Booleschen Algebra der offen- abgeschlossenen Teilmengen von $\Omega(B_p)$. Für E aus B_p sei A_E die entsprechende offen- abgeschlossene Menge, und für offen- abgeschlossenes A in $\Omega(B_p)$ sei E_A die zugehörige Projektion in B_p . Jede Borelmenge C in $\Omega(B_p)$ läßt sich eindeutig darstellen als $C = K^C \Delta A^C$, wobei K von erster Kategorie in $\Omega(B_p)$, A^C offen- abgeschlossen in $\Omega(B_p)$ ist und Δ die symmetrische Differenz bedeutet. Den Zusammenhang zwischen C und A^C liefern folgende Rechenregeln:

$$(i) \quad A^{\Omega(B_p)} = \Omega(B_p), \quad A^\emptyset = \emptyset$$

$$(ii) \quad A^{C_1 \cup C_2} = A^{C_1} \cup A^{C_2}$$

$$(iii) \quad A^{\Omega(B_p) \setminus C} = \Omega(B_p) \setminus A^C$$

$$(iv) \quad A^{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^{C_n} \right)^- = \sup \{A^{C_n} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$(v) \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow A^{C_1} \cap A^{C_2} = \emptyset$$

(A° bzw. A^- sei der offene Kern bzw. der Abschluß von A in der jeweiligen Topologie).

Es folgt nun sofort, daß jede Abbildung $m : B_p \rightarrow Y$ (Y $\mathbb{R}$ -Banachraum) mit $m(E + F) = m(E) + m(F)$, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ (E, F disjunkt, $E_1, E_2, \dots$ Folge in B_p) durch $m(C) := m(E_C)$ ein σ -additives Y -wertiges Maß auf den Borelschen Teilmengen von $\Omega(B_p)$ induziert.

Sei (S, Σ) ein Meßraum, d.h. Σ eine σ -Algebra auf der Menge S . Eine Abbildung $\rho : \Sigma \rightarrow B_p$ heißt B_p -wertiges Maß, wenn gilt:

$$(i) \quad \rho(\emptyset) = 0, \quad \rho(S) = \text{Id}$$

$$(ii) \quad \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(A_n) \quad (= \sup \rho(A_n))$$

im Sinne der starken Operatorentopologie).

Die Eigenschaft (ii) heißt σ -Additivität von ρ .

Durch ρ werden skalarwertige Maße induziert: Dazu sei für $x \in X$:

$$\rho_x^p : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \text{ def. durch } \rho_x^p(A) := \|(\rho(A))(x)\|$$

Die σ -Additivität von ρ hat unmittelbar zur Folge, daß die ρ_x^p σ -additive Maße auf (S, Σ) sind. Weitere skalarwertige durch ρ induzierte Maße werden in [Be 2] betrachtet.

Ein spezielles B_p -wertiges Maß definiert auf den Borelmengen Σ_Ω von $\Omega(B_p)$ ist ρ_p gegeben durch $\rho_p(C) := E_{A^C}^C$. Die auf S. 7 angegebenen Beziehungen zwischen C und A^C implizieren die σ -Additivität ρ_p .

Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n$ offen- abgeschlossen und o.B.d.A disjunkt und nichtleer sind die charakteristischen Funktionen χ_{A_i} und damit auch $\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ stetig. Man definiert:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}\right) := \sum_{i=1}^n a_i E_{A_i} \in [X] \quad (= \text{Menge der stetigen Eudomor-}$$

phismen auf X). Wegen der Disjunktheit der E_{A_i} und $A_i \neq \emptyset$ gilt:

$\left\| \sum_{i=1}^n a_i E_{A_i} \right\| = \max |a_i|$, das heißt: ϕ ist Isometrie auf der Menge aller stetigen Treppenfunktionen auf $\Omega(B_p)$, die sich (da

$\Omega(B_p)$ extrem unzusammenhängend ist) zu einer Isometrie von

$\mathcal{C}(\Omega(B_p))^{(*)}$ nach $[X]$ fortsetzen läßt. Unter $C_p(B_p)$ verstehen wir

die von B_p in $[X]$ erzeugte Banachalgebra. Offensichtlich ist

$\phi(\mathcal{C}(\Omega(B_p))) = C_p(B_p)$. Für $p \neq 2$ und $B_p = B_p(X)$ heißt $C_p(B_p)$ die Cunningham-p-Algebra und die Operatoren werden Cunningham-p-Operatoren genannt ([A-E]). Für $f \in \mathcal{C}(\Omega(B_p))$ und $T \in C_p(B_p)$ wird noch vereinbart: $\hat{T} := \phi^{-1}(T)$, $\tilde{f} := \phi(f)$. Einen wesentlichen Zusammen-

(*) Unter $\mathcal{C}(\Omega(B_p))$ verstehen wir die Menge der stetigen Funktionen auf $\Omega(B_p)$

hang zwischen T und $\hat{T}$ liefert das Resultat von Behrends ([Be 2]), daß das Spektrum von T , $\sigma(T)$, gerade gleich dem Bild von $\hat{T}$ ist.

Fundamental für die Theorie der Cunningham-p-Operatoren ist die Einführung des Zykels eines festen $x \in X$ bzgl. einer vollständigen Booleschen Algebra B_p : Unter $S(x, B_p)$ verstehen wir den von $\{Ex | E \in B_p\}$ in X erzeugten abgeschlossenen Unterraum. Von den zahlreichen Resultaten, wie sie unter anderem Bade ([Ba]) und Sullivan ([Su]) hierzu fanden, seien hier nur zwei für das Folgende wesentliche erwähnt: Für $T \in [X]$ gilt: $T \in C_p(B_p)$ genau dann, wenn für alle $x \in X$: $T(S(x, B_p)) \subseteq S(x, B_p)$; ferner ist $S(x, B_p)$ isometrisch isomorph einem L^p -Raum bzgl. eines von x abhängigen Maßes auf $\Omega(B_p)$ (s.a. [Ev], [FPS]).

Es sei nun:

$$M(S, \Sigma) := \{f | f: S \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ meßbar}\}$$

$$M_b(S, \Sigma) := \{f | f: S \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ meßbar und beschränkt}\}$$

Sind keine Verwechslungen möglich, so wird kurz $M(S)$ bzw. $M_b(S)$ geschrieben. Ist ρ ein B_{p_n} wertiges Maß auf (S, Σ) , so wird für eine Treppenfunktion $f = \sum_{v=1}^n a_v \chi_{A_v}$ ($a_v \in \mathbb{R}$, $A_v \in \Sigma$, alle A_v o.B. d.A. disjunkt) definiert:

$$\int f(s) \rho(ds) := \sum_{v=1}^n a_v \rho(A_v) \quad (f \in C_p(B_p))$$

Setzen wir diese Abbildungen auf $M_b(S)$, versehen mit der Supremumsnorm, linear und stetig fort und bezeichnen diese Fort-

setzung wieder mit $\int$, so erhalten wir die Aussage, daß $\int : M_b(S) \rightarrow C_p(B_p)$ ein Algebrenhomomorphismus mit $\|\int\| = 1$ ist.

Für $T \in C_p(B_p)$ wird durch:

$$f(T) := \int f \circ \hat{T}(\omega) \rho_p(d\omega) \quad (f \in M_D(\text{Bild } \hat{T}))$$

ein Funktionalkalkül definiert. Für $f \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$ gilt:

$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ (spektraler Abbildungssatz). Mit Hilfe des Funktionalkalküls kann ein von T induziertes B_p -wertiges Maß auf den Borelmengen von $\sigma(T)$ durch: $\rho_T(B) := \chi_B(T)$ definiert werden. Unter anderem sind die beiden folgenden Ergebnisse über ρ_T erwähnenswert: (i) Für $f \in M_b(\sigma(T))$ gilt: $f(T) = \int f(\lambda) \rho_T(d\lambda)$, also insbesondere $T = \int \lambda \rho_T(d\lambda)$. (ii) Ist $B \subseteq \sigma(T)$, B Borelmenge, so ist $\sigma(T/\rho_T(B)X) \subseteq B^-$. Für diese und weitere Ergebnisse der Abbildung $\int$ siehe [Be 2].

In [Mü] wird diese Abbildung $\int$ auf $M(S)$ erweitert. Dazu wird für $f \in M(S)$ definiert: $D(T(f)) := \{x | \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)x \text{ exist.}\}$ und $T(f)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)x$ für $x \in D(T(f))$. Dabei ist $f_n(s) := f(s)$ für $|f(s)| \leq n$ und 0 für $|f(s)| > n$ sowie: $T(f_n) := \int f_n(s) \rho(ds)$. Für zwei Operatoren R, T werde vereinbart ($D(T) :=$ Definitionsbereich von T): $T \subseteq R \Leftrightarrow D(T) \subseteq D(R)$ und $Tx = Rx$ für alle $x \in D(T)$. Ist $f, g \in M(S)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $C \in \Sigma$ so gelten folgende Eigenschaften: (i) $D(T(f)) = D(T(|f|))$; (ii) $D(T(f)) \subseteq D(T(g))$ wenn

$|f(s)| \geq |g(s)|$; (iii) $T(\alpha f) = \alpha T(f)$; (iv) $T(fg) \supseteq T(f) \circ T(g)$,
 $D(T(f) \circ T(g)) = D(T(fg)) \cap D(T(g))$; (v) $T(f+g) \supseteq T(f) + T(g)$,
 $D(T(f)+T(g)) = D(T(f+g)) \cap D(T(f))$; (vi) $T(f) \rho(C) \supseteq \rho(C) T(f)$.

Ein wichtiges Resultat über den Definitionsbereich von $T(f)$ ist: $x \in D(T(f))$ genau dann, wenn $f \in L^p(S, \rho_x^p)$ und es gilt für $x \in D(T(f))$: $\| \int f(s) \rho(ds) x \|^p = \int |f(s)|^p \rho_x^p(ds)$.

Weiterhin gilt für $g, f_1, f_2, \dots \in M(S)$ und $f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s)$ sowie $|f_n(s)| \leq |g(s)|$ f.a. $s \in S$: $x \in D(T(g))$, so auch $x \in D(T(f_n))$ ($n \in \mathbb{N}$), $x \in D(T(f))$ und: $T(f)x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n)x$.

Man beachte noch die beiden wichtigen Tatsachen, daß erstens aus $f = g$ (ρ - fast überall) $T(f) = T(g)$ folgt und zweitens, daß beim Übergang von $M(S)$ zu $\bar{M}(S) := \{f|f:S \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\}$ die Operatorenklasse nicht geändert wird.

Die Menge der linearen, dicht definierten, abgeschlossenen Operatoren T von X nach X , die die folgenden Eigenschaften haben: Es gibt ein $\rho: \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow B_p$, ρ ein σ -additives B_p -wertiges Maß mit (i) $\rho(C)X \subseteq D(T)$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ beschränkt (ii) $\rho(C)D(T) \subseteq D(T)$ und für $x \in D(T)$ gilt: $T\rho(C)x = \rho(C)Tx$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ (iii) $\sigma(T/\rho(C)X) \subseteq C^-$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ (iv) $T/\rho(C)X \in C_p(B_p \circ \rho(C))$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ beschränkt, werden abgeschlossene Cunninghamham-p-Operatoren genannt. Zur Abkürzung bezeichnen wir diese Operatorenklasse mit $\underline{C}_p^a(B_p)$.

Es wird jetzt der Zusammenhang zwischen $\underline{C}_p^a(B_p)$ und den davor definierten $T(f)$ hergestellt. Die Abbildung $\int$ ist durch die Zuordnung $f \mapsto T(f)$ für $f \in \bar{M}(S)$ definiert. Es ist $\int$ eine Abbildung von $\bar{M}(S)$ nach $\underline{C}_p^a(B_p)$. Fasert man $\bar{M}(S)$ nach Klassen

ρ fast überall gleichen Funktionen zu $[\bar{M}](S)$, so ist die induzierte Abbildung $\int : [\bar{M}](S) \rightarrow C_p^a(B_p)$ definiert durch $[f] \rightarrow T(f)$ injektiv. Betrachtet man speziell $S = \Omega = \Omega(B_p)$, $\rho = \rho_p$ und beachtet noch die Tatsache, daß in jeder Klasse $[g]$ meßbarer, ρ - fast überall gleicher Funktionen auf Ω mit Werten in $\mathbb{R}$ genau ein f aus $\mathfrak{S}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Omega)$ existiert, daß mit g ρ - fast überall gleich ist (vgl. [Ev], [FPS]), so gilt, falls man $\mathfrak{S}_{\overline{\mathbb{R}}}^e(\Omega) := \{f | f \in \mathfrak{S}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Omega), f(\omega) \text{ ist } \rho_p\text{-f.ü. reell}\}$ definiert: Die Abbildung $\int : \mathfrak{S}_{\overline{\mathbb{R}}}^e(\Omega) \rightarrow C_p^a(B_p)$ definiert durch $f \rightarrow T(f)$ ist bijektiv.

Wichtig ist das folgende Ergebnis über $C_p^a(B_p)$: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n := T /_{\rho}([-n, n])X$, wobei ρ B_p -wertiges Maß, σ additiv mit (i) - (iv) bzgl. T . Dann gilt: $\sigma(T) \cap (-n, n) \subseteq \sigma(T_n) \subseteq \sigma(T) \cap [-n, n]$. Für diese und weitere Ergebnisse siehe [Mü].

1.2. Übersicht

Ziel der Arbeit ist die Untersuchung und Charakterisierung von $C_p^a(B_p)$. Dabei ergeben sich folgende Hauptresultate:

1. Es wird ein Funktionalkalkül für $C_p^a(B_p)$ definiert und ein spektraler Abbildungssatz bewiesen. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß $g(T) \in C_p(B_p)$ für g wesentlich beschränkt und $T \in C_p^a(B_p)$ ist.
2. Es wird zu $T \in C_p^a(B_p)$ eine zugehörige Zerlegung der Eins definiert und deren Eindeutigkeit bewiesen. Damit wird ein analoges Resultat erzielt, wie es in [D-S] für den komplexen Fall vorliegt. Die Hauptschwierigkeit besteht im Beweis der Aussage für $T \in C_p(B_p)$. Dunford-Schwartz führt den Beweis mit Hilfe der Beziehung:

$$E(\delta)X = \{x | \sigma(x) \subseteq \delta\}$$

Da diese Beziehung mit der Theorie der analytischen Fortsetzung gewonnen wird, steht sie im Fall von reellen Banachräumen nicht zur Verfügung. In der vorliegenden Arbeit erfolgt der Beweis unter Ausnutzung der Theorie B_p -wertiger Maße, der speziellen Struktur des Darstellungsraumes von B_p und der Eigenschaften von Cunningham-p-Operatoren.

3. Der Definitionsbereich von $T \in C_p^a(B_p)$ wird genauer untersucht. Speziell interessiert die Frage, ob es für alle

$T \in C_p^a(B_p)$ einen gemeinsamen Definitionsbereich, der in X noch dicht liegt, geben kann. Zwei Beispiele zeigen, daß der gemeinsame Definitionsbereich sowohl dicht sein, als auch nur aus der Null bestehen kann. Unter Verwendung der Tatsache, daß der Darstellungsraum von $C_p(B_p)$ hyperstonesch ist, d.h. ein perfektes Maß zuläßt, wird der gemeinsame Definitionsbereich charakterisiert.

4. Unter einer zunächst stark erscheinenden Zusatzvoraussetzung werden die Operatoren aus $C_p^a(B_p)$ als im wesentlichen als die abgeschlossenen, dicht definierten, linearen Operatoren erkannt, die die B_p -Zykel geschnitten mit dem Definitionsbereich fest lassen. In einem Gegenbeispiel wird gezeigt, daß die Zusatzvoraussetzung notwendig war.

2) Ein Funktionalkalkül für Operatoren der Klasse $C_p^a(B_p)$

Als Hauptergebnis dieses Abschnitts ergibt sich ein spektraler Abbildungssatz für $C_p^a(B_p)$. Dazu wird zunächst einmal ein Funktionalkalkül für $C_p^a(B_p)$ entwickelt.

Sei $T \in C_p^a(B_p)$. Für $S = \Omega$, $\rho = \rho_p$, $\Sigma = \Sigma_\Omega^{(*)}$ gibt es genau ein $\tilde{f} \in \mathcal{C}_\mathbb{R}^e(\Omega)$ mit $T = T(\tilde{f})$. Zu $\tilde{f}$ ist eindeutig durch die Festsetzung

$$f(\omega) = \begin{cases} \tilde{f}(\omega) & \text{für } |\tilde{f}(\omega)| < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein $f \in M(\Omega)$ zugeordnet. Da sich f und $\tilde{f}$ nur auf einer ρ_p -Nullmenge unterscheiden gilt immer noch: $T = T(f)$, d.h.:

$$\text{Für } x \in D(T(f)) \text{ gilt: } Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\omega) \rho(d\omega) x$$

$$D(T(f)) := \{x | x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(\omega) \rho(d\omega) x \text{ ex.}\}$$

Für $g \in M(\mathbb{R})$ und $f \in M(\Omega)$ ist $g \circ f \in M(\Omega)$. Daher ist es sinnvoll zu definieren.

Definition 1

Für $T \in C_p^a(B_p)$ sei f die nach Vorbemerkung eindeutig zu T bestimmte Funktion aus $M(\Omega)$ mit $T = T(f)$. Die Abbildung:

(*) Σ_Ω sind die Borelmengen auf Ω , entsprechend sind $\Sigma_\mathbb{R}$ die Borelmengen auf $\mathbb{R}$.

$$\psi_T : M(\mathbb{R}) \rightarrow C_P^a(B_P)$$

definiert durch

$$\psi_T(g) := T(g \circ f)$$

nennt man Funktionalkalkül für T und schreibt für $\psi_T(g)$ auch $g(T)$.

Das folgende Lemma gestattet es, $\psi_T(g)$ konkret zu berechnen. Anschließend wird Lemma 2 gezeigt, daß sich bei Wahl von $g \in M_b(\mathbb{R})$ und $f \in M_b(\Omega)$ genau der in [Be 2] S. 14 betrachtete Kalkül ergibt.

Lemma 1

Es sei $T = T(f) \in C_P^a(B_P)$. Für $\rho = \rho_P$ sei das Maß

$$\rho_f : \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow B_P$$

durch

$$\rho_f(C) := \rho(f^{-1}(C))$$

erklärt. Dann gilt:

$$g(T(f)) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \rho_f(d\lambda) \quad (*)$$

Beweis

Für $f_b \in M_b(\Omega)$, $g_b \in M_b(\mathbb{R})$ gilt: (siehe [Mü]):

$$(1) \int g_b(f_b(\omega)) \rho(d\omega) = \int g_b(\lambda) \rho_{f_b}(d\lambda).$$

(*) Im folgenden bedeutet $\int$ immer Integration über die gesamte Menge des zugrundeliegenden Maßraumes.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$g_n := g \cdot \chi_{[-n,n]} \cdot \chi_{g^{-1}[-n,n]}^{-1}$$

$$f_n(\omega) := \begin{cases} f(\omega) & \text{wenn } |f(\omega)| \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man hat dann:

$$\int_{\Omega} g_n \circ f(\omega) \rho(d\omega) = \int_{\Omega} g_n \circ f_n(\omega) \rho(d\omega)$$

$$(1) \quad \int_{f_n(\Omega)} g_n(\lambda) \rho_{f_n}(d\lambda) = \int_{-n}^n g(\lambda) \rho_f(d\lambda)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da $\rho_{f_n} = \rho_f$ auf $[-n,n]$.

Wegen: $\chi_{[-n,n]} \cdot \chi_{g^{-1}([-n,n])}^{-1} = \chi_{C_n}$, wobei $C_n := [-n,n] \cap g^{-1}([-n,n])$

und $\rho(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n) = \rho(\mathbb{R}) = \text{Id}$ folgt:

$$\begin{aligned} D(g(T(f))) &= D(T(g \circ f)) = \\ &= \{x | x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n \circ f(\omega) \rho(d\omega) x \text{ existiert}\} \\ &= \{x | x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n g(\lambda) \rho_f(d\lambda) x \text{ existiert}\} \end{aligned}$$

und:

$$g(T(f))x = \int_{\Omega} g \circ f(\omega) \rho(d\omega) x = \int g(\lambda) \rho_f(d\lambda) x$$

für $x \in D(g(T(f)))$ und damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2

Für $T \in C_p(B_p)$ stimmt der durch Definition gegebene Funktionalkalkül mit dem in [Be 2] S. 14 eingeführten Funk-

tionalkalkül überein.

Beweis

Ist $T \in C_p(B_p)$, so ist das in der Definition 1 benutzte f gerade $\hat{T}$ und daher bekommt man:

$$g(T) = \int g(f(\omega)) \rho(d\omega) = \int g(\hat{T}(\omega)) \rho(d\omega)$$

Das aber ist gerade die Formel, die in [Be 2] S. 14 zur Definition des Funktionalkalkül dient.

Im folgenden werden Eigenschaften der Abbildung Ψ_T untersucht:

Satz 1

Der Funktionalkalkül Ψ_T hat folgende Eigenschaften:

$(g, h \in M(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0)$:

$$(i) \quad D(\Psi_T(g)) = D(\Psi_T(|g|)),$$

$$(ii) \quad D(\Psi_T(h)) \subseteq D(\Psi_T(g)) \text{ wenn}$$

$$|h(\lambda)| \geq |g(\lambda)| \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(iii) $\Psi_T(g)$ ist genau dann beschränkt, wenn g wesentlich beschränkt ist (d.h. beschränkt bis auf eine ρ -Nullmenge)

$$(iv) \quad \Psi_T(\alpha g) = \alpha \Psi_T(g)$$

$$(v) \quad \Psi_T(gh) \supseteq \Psi_T(g) \circ \Psi_T(h) \text{ und}$$

$$D(\Psi_T(g) \circ \Psi_T(h)) = D(\Psi_T(gh)) \cap D(\Psi_T(h))$$

$$(vi) \quad \Psi_T(g+h) \supseteq \Psi_T(g) + \Psi_T(h) \text{ und}$$

Die Abbildung 2 zeigt den Verlauf der Siedepunktskurve (I) und der Kondensationskurve (II) eines $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ -Gemisches bei einem Druck von ca. 30 Torr ²²⁾. Daraus wird ersichtlich, daß das alleinige Eindampfen im Vakuum durch den höheren H_2O_2 -Gehalt der Lösungen die Bedingungen immer mehr verschlechtert. Das Kondensat reichert sich stärker mit Wasser an, so daß eine vollständige Trennung der beiden Komponenten ausbleibt.

Dommain ²³⁾ hat eine halbtechnisch, kontinuierlich arbeitende Anlage zur Darstellung von hochkonzentrierten Wasserstoffperoxidlösungen entwickelt. Das Verfahren basiert auf dem Prinzip der Entspannungsdestillation. Dabei wird eine partielle Kondensation des H_2O_2 -Dampfes angestrebt. Liegt nämlich die Siedetemperatur des Dampfes höher als der Siedepunkt des Wassers bei dem entsprechenden Arbeitsdruck, so muß zwangsläufig eine immer höher konzentrierte H_2O_2 -Lösung resultieren (s. Abb. 2).

Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Apparatur fußt im Prinzip auf den Erkenntnissen von Dommain, dabei werden die beim Aufbau und vor allem später im Betrieb gesammelten Erfahrungen gleich mit verwertet.

2.2.4.3. Wirkungsweise der Apparatur

Die Wirkungsweise der Apparatur soll kurz an Hand der Abb. 3, Seite 20, erfolgen.

Bei einem Druck p (s. Tab. 2, Seite 24), der mit einer Wasserstrahlpumpe erzeugt wird, saugt man die 85 Gew.-%ige H_2O_2 -Lösung in den Verdampfer V_1 . V_1 wird mit Hilfe eines Umlaufthermostaten auf der konstanten Betriebstemperatur T_{V_1} gehalten (s. Tab. 2). Eine kontinuierliche Destillation ist nur bei gleichzeitiger absolut gleichmäßiger Ansauggeschwindigkeit gewährleistet. Durch den Einbau einer Glaskapillare von 0,5 mm Durchmesser läßt sich der Durchfluß des zur gleichmäßigen Verdampfung erforderlichen Lösungsvolumens besser handhaben. In Verbindung mit dem Regulierhahn H_1 wird

in der Situation von Satz 1 (viii):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_T(g_n) = \Psi_T(g)$$

im Sinne der starken Operatorortopologie. Diese Aussage kann als eine gewisse Stetigkeit von Ψ_T gedeutet werden.

2) Wie aus der Formulierung der Aussagen (iv), (v), (vi) des Satzes hervorgeht, muß man bei den algebraischen Eigenschaften von Ψ_T immer den Definitionsbereich berücksichtigen.

3) Durch die in dieser Bemerkung unter 1) und 2) zusammengefaßten Ergebnisse über Ψ_T wird man auf die Frage geführt, ob es für die Operatoren von $C_P^a(B_P)$ einen gemeinsamen, dichten Definitionsbereich gibt. Dieses Problem wird in Kapitel 4 behandelt.

4) Bemerkenswert ist die Tatsache, daß $\Psi_T(g)$ für ein wesentlich beschränktes g aus $C_P^a(B_P)$ ist. Das folgt aus Satz 1 (iii).

Zur Vorbereitung des spektralen Abbildungssatzes wird ein Lemma bewiesen:

Lemma 3 (vgl. [D-S] S. 2247)

Es sei $T = T(f) \in C_P^a(B_P)$. Für $E \in B_P$ gelte:

$$(i) \quad E D(T) \subseteq D(T)$$

$$(ii) \quad ETx = TEx \text{ für } x \in D(T)$$

Dann gilt: $\sigma(T) \supseteq \sigma(T/E_X)$

Beweis

Es sei $\lambda \notin \sigma(T)$, so daß $\lambda \text{Id} - T$ die beschränkte Inverse R hat. Es sei R_0 die Einschränkung von ER auf EX . Dann gilt:

$$R_0(\lambda \text{Id} - T)x = ER(\lambda \text{Id} - T)x = Ex = x \quad (x \in D(T|_{EX}))$$

und:

$$(\lambda \text{Id} - T)R_0 x = E(\lambda \text{Id} - T)Rx = Ex = x \quad (x \in EX)$$

Dies bedeutet aber: $\lambda \notin \sigma(T|_{EX})$, womit das Lemma bewiesen ist.

Satz 2 (Spektraler Abbildungssatz)

Es sei $T = T(f) \in C_p^a(B_p)$ und $g \in \mathfrak{C}(\sigma(T))$

Dann gilt:

$$\sigma(g(T(f))) = g(\sigma(T(f)))$$

Beweis

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n := T|_{\rho_f((-n,n)X)}$

Wegen $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$ für $n \in \mathbb{N}$ (siehe [Mü] S. 41) gilt:

$g|_{\sigma(T_n)} \in \mathfrak{C}(\sigma(T_n))$ und daher ([Be 2] S. 15) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1) \quad g(\sigma(T_n)) = \sigma(g(T_n))$$

Nach dieser Vorbereitung wird die Gleichheit der beiden im Satz vorkommenden Mengen $\sigma(g(T(f)))$ und $g(\sigma(T(f)))$ gezeigt.

" $\subseteq$ "

Es sei $\lambda \in g(\sigma(T))$, genauer: $\lambda = g(\mu)$ mit $\mu \in \sigma(T)$.

Man wähle $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $\mu \in (-n,n)$. Dann ist nach [Mü],

Lemma 18: $\mu \in \sigma(T_n)$ also : aus $\lambda \in g(\sigma(T_n))$ folgt $\lambda \in \sigma(g(T_n))$.

Ist $\hat{T}_n$ die zu $T_n \in C_p(B_p \circ \rho_f(-n, n))$ gehörige stetige Abbildung auf der zu $\rho_f(-n, n)$ entsprechenden offen abgeschlossenen Menge U_n , dann gilt:

$$g(T_n) = T(g \circ \hat{T}_n) = \int g(\lambda) \rho_{T_n}^\wedge(d\lambda) = T_f(g) / \rho_{T_n}^\wedge([-n, n])x$$

$$(\text{Dabei ist } T_f(g) = \int f(\lambda) \rho_f(d\lambda))$$

Der Abkürzung halber sei jetzt $T_f(g)$ gleich $T(g)$ gesetzt.

Sei $x \in D(T(g))$. Dann gilt:

$$T(g)x = \lim_{k \rightarrow \infty} T(g_k)x$$

Weil $T(g_k)$ aus $C_p(B_p \circ \rho_f([-k, k]))$ ist, bekommt man:

$$\rho_{T_n}^\wedge([-n, n])T(g)x = \rho_{T_n}^\wedge([-n, n]) \lim_{k \rightarrow \infty} T(g_k)x$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{T_n}^\wedge([-n, n])T(g_k)x =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} T(g_k) \rho_{T_n}^\wedge([-n, n])x$$

$$\text{Also gilt: } (1) \quad \rho_{T_n}^\wedge([-n, n])D(T(g)) \subseteq D(T(g))$$

Weiter ist für $x \in D(T(g))$:

$$\rho_{T_n}^\wedge([-n, n])T(g)x = \rho_{T_n}^\wedge \lim_{k \rightarrow \infty} T(g_k)x =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{T_n}^\wedge([-n, n])T(g_k)x.$$

Da $T(g_k)$ aus $C_p(B_p \circ \rho_f([-k,k]))$ ist, folgt daraus:

$$(2) \quad \rho_{T_n}^{\wedge}([-n,n])T(g)x = T(g)\rho_{T_n}^{\wedge}([-n,n])x \text{ für } x \in D(T(g)).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich nach Lemma 3:

$$\sigma(T(g)/\rho_{T_n}^{\wedge}([-n,n])X) \subseteq \sigma(T(g))$$

Also ist folgende Aussage richtig:

$$\lambda \in g(\sigma(T)) \Rightarrow \lambda \in \sigma(T(g)) = \sigma(T_f(g)) = \sigma(g(T)).$$

" $\supseteq$ "

Es sei $\lambda \in \sigma(g(T))$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $\lambda \in (-n,n)$ ist.

Dann gilt:

$$\lambda \in \sigma(g(T)/\rho_{(g \circ f)^{-1}((-n,n))X}^{-1}) \quad (1)$$

Seien: $\rho^n(C) := \rho(C \cap (-n,n))$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$

$$g^n := g/\sigma(T) \cap [-n,n]$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned} g^{(T)}/\rho_{((g \circ f)^{-1}((-n,n))X)}^{-1} &= \int \lambda \rho_{g \circ f}^n(d\lambda) \\ &= \int g(\lambda) \rho_f^n(d\lambda) = \int g^n(\lambda) \rho_f^n(d\lambda) \\ &= g^n(T/\rho_f((-n,n))X) \quad (2) \end{aligned}$$

Mit (1) und (2) bekommen wir:

$$\lambda \in \sigma(g^n(T/\rho_f((-n,n))X))$$

Wegen $\sigma(T) \cap [-n,n] \subseteq \sigma(T/\rho_f((-n,n))X)$ ist $g^n \in \sigma(T/\rho_f((-n,n))X)$.

Daher folgt durch Anwendung des spektralen Abbildungssatzes für den beschränkten Fall:

$$\lambda \in g^n(\sigma(T/\rho_f((-n,n))X))$$

Weil $g^n = g$ auf $\sigma(T/\rho_f((-n,n))X)$ ist, gilt:

$$\lambda \in g(\sigma(T/\rho_f((-n,n))X))$$

Da $\sigma(T/\rho_f((-n,n))X) \subseteq \sigma(T)$, folgt:

$$\lambda \in g(\sigma(T))$$

und das war zu zeigen.

3) Die Eindeutigkeit der Zerlegung der Eins

Ein abgeschlossener Cunningham-p-Operator T ist ein abgeschlossener, dicht definierter, linearer Operator, für den ein σ -additives, B_p -wertiges Maß ρ_T mit den Eigenschaften (i)-(iv) existiert (siehe Vorbereitungen S.11). Ein solches Maß wollen wir Zerlegung der Eins von T nennen. (Genaue Definition S. 29). Es erhebt sich die Frage, ob durch die abstrakten Eigenschaften (i)-(iv) ρ_T schon eindeutig zu T bestimmt ist. Diese Frage wird im folgenden untersucht und positiv beantwortet. Man wird dabei feststellen, daß die Hauptaufgabe der Untersuchungen darin besteht, die Eindeutigkeit der Zerlegung der Eins für den "beschränkten Fall", also für Cunningham-p-Operatoren zu zeigen.

Definition 2

Es sei $T \in C_p(B_p)$. Ein σ -additives B_p -wertiges Maß, definiert auf den Borelmengen auf $\mathbb{R}$ mit $\sigma(T_B) \subseteq B^-$ für jede Borelmenge B heißt Zerlegung der Eins von T . Dabei ist $T_B := T/\rho(B)X$.

Satz 3

Sei $T \in C_p(B_p)$ und ρ eine Zerlegung der Eins von T . Dann gilt:

$$T = \int \lambda \rho(d\lambda)$$

Beweis

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $C_\lambda := (-\infty, \lambda]$. Weiter sei U_λ die offen-abge-

geschlossene Menge, die unter ρ_p auf $\rho(C_\lambda \cap \sigma(T))$ abgebildet wird. Schließlich werde noch gesetzt: $T_\lambda := T / \rho(C_\lambda \cap \sigma(T))$.

Es ist $\hat{T}_\lambda \in \mathfrak{S}(U_\lambda)$. Da T_λ ein Cunningham-p-Operator ist, so ist:

$$\text{Bild } (\hat{T}_\lambda) = \sigma(T_\lambda) \subseteq (\sigma(T) \cap C_\lambda)^- \subseteq (-\infty, \lambda]$$

gültig. Das bedeutet aber, daß sich U_λ als:

$$U_\lambda = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T}_\lambda \omega \leq \lambda\}$$

schreiben läßt.

Da U_λ eine offen- abgeschlossene Menge ist, gilt

$$U_\lambda = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T}_\lambda \omega \leq \lambda\}^o.$$

Es wird nun gezeigt, daß aus $\hat{T} \omega < \lambda$ die Aussage $\omega \in U_\lambda$ und damit $\hat{T}_\lambda \omega < \lambda$ folgt.

Dazu sei $\omega \notin U_\lambda$, also: $\omega \in \Omega \setminus U_\lambda$. Nach Definition von U_λ und der Tatsache, daß ρ und ρ_p B_p -wertige Maße sind, folgt, daß

$$\rho_p(\Omega \setminus U_\lambda) = \rho((\lambda, +\infty))$$

gilt.

Wieder wegen der Aussage über das Spektrum hat man dann:

$$\begin{aligned} \hat{T} \omega &= \hat{T} \chi_{\Omega \setminus U_\lambda} \omega \\ &= \hat{T}_\lambda \omega, \omega \geq \lambda \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $T_\lambda = T / \rho((\lambda, \infty))$.

Der Beweis des Satzes wird erbracht, indem man

$$\rho_p(U_\lambda) = \rho(\{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0)$$

zeigt.

Nach [FPS], S. 80 gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \left[\bigcup_{\mu < \lambda} \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \mu\}^0 \right]^- \cap \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega = \lambda\}^0 = \\ & = \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0 \end{aligned}$$

Ist λ kein Eigenwert von T , so ist $U_{\{\lambda\}} := \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega = \lambda\}$ eine ρ_p -Nullmenge. Daher gilt:

$$\begin{aligned} & \rho_p \left(\left[\bigcup_{\mu < \lambda} \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \mu\}^0 \right]^- \cap \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega = \lambda\}^0 \right) \\ & = \rho_p \left(\left[\bigcup_{\mu < \lambda} \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T}_\lambda \omega \leq \mu\}^0 \right]^- \right) \\ & = \rho_p(\{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0) \end{aligned}$$

Da U_λ eine offen- abgeschlossene Menge ist, und daher

$$\begin{aligned} & \left[\bigcup_{\mu < \lambda} \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T}_\lambda \omega \leq \mu\}^0 \right]^- \subseteq U_\lambda \\ & \subseteq \{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0 \end{aligned}$$

gilt, folgt somit:

$$\rho_p(U_\lambda) = \rho_p(\{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0)$$

Es bleibt noch der Fall, daß λ Eigenwert ist, zu untersuchen. Dazu sei U_ε die offen- abgeschlossene Menge zu $\rho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))$ für $\varepsilon > 0$. Ist $\omega \in U_{\{\lambda\}}$, so gilt, wieder aufgrund von $\sigma(T_B) \subseteq B^-$: $\omega \in U_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit hat man:

$$0 < \rho_p(U_{\{\lambda\}}) \leq \bigcap_{\varepsilon > 0} \rho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))$$

Da ρ σ -additiv ist, folgt:

$$0 < \rho_p(U_{\{\lambda\}}) \leq \rho(\{\lambda\})$$

Man definiere: $T/\rho(\{\lambda\})_X =: T_{\{\lambda\}}$ und $\hat{U}_{\{\lambda\}} :=$ die zu $\rho(\{\lambda\})$ gehörige offen- abgeschlossene Menge. Dann ist:

$$\hat{U}_{\{\lambda\}} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T}_{\{\lambda\}} \omega = \lambda\}$$

(siehe dazu S. 27) und man kann jetzt schließen:

$$\begin{aligned} \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T}_{\{\lambda\}} \omega = \lambda\} &= \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T} \chi_{\hat{U}_{\{\lambda\}}} \omega = \lambda\} \\ &\subseteq \{\omega \mid \omega \in \Omega, \hat{T} \omega = \lambda\} = U_{\{\lambda\}} \end{aligned}$$

Damit erhält man $\rho(\{\lambda\}) \leq \rho_p(U_{\{\lambda\}})$ und somit $\rho(\{\lambda\}) = \rho_p(U_{\{\lambda\}})$.

Wegen $\rho((-\infty, \lambda]) = \rho((-\infty, \lambda)) \cup \rho(\{\lambda\})$ folgt nun sofort:

$$\hat{T} \omega \leq \lambda \text{ gilt genau dann, wenn } \hat{T}_\lambda \omega \leq \lambda \text{ gilt.}$$

das bedeutet:

$$\rho_p(U_\lambda) = \rho_p(\{\omega | \omega \in \Omega, \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0)$$

Zusammenfassend heißt das:

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\rho((-\infty, \lambda] \cap \sigma(T)) = \rho_p(\{\omega | \hat{T} \omega \leq \lambda\}^0)$$

Gemäß [FPS], S. 75 liefert daher ρ genau die Spektralfamilie E_λ , so daß

$$T = \int \lambda dE_\lambda$$

gilt.

Korollar 1

Für $T \in C_p(B_p)$ ist eine Zerlegung der Eins ρ eindeutig bestimmt und es gilt $\rho = \rho_T$.

Definition 3

Es sei $T \in C_p^a(B_p)$ und $\rho : \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow B_p$ ein σ -additives B_p -wertiges Maß. ρ heißt Zerlegung der Eins zu T , wenn gilt:

- (i) $\rho(C)X \subseteq D(T)$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ beschränkt
- (ii) $\rho(C)(D(T)) \subseteq D(T)$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ und für $x \in D(T)$ gilt
 $T\rho(C)x = \rho(C)Tx$
- (iii) $\sigma(T/\rho(C)X) \subseteq C^-$ für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$
- (iv) $T/\rho(C)X \in C_p(B_p \circ \rho(C))$
 für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ beschränkt.

Es kann mit Hilfe von Satz 3 gefolgert werden, daß eine Zerlegung der Eins eindeutig bestimmt ist. Bevor diese Aussage in Satz 4 bewiesen wird, beweisen wir, daß der Funktionalkalkül ähnlich dem Vorgehen von Behrends in [Be 2] ein σ -additives Maß liefert.

Definition 4

Es sei $T \in C_p^a(B_p)$. Für $B \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ sei der Ausdruck $\tilde{\rho}_T(B)$ durch $\tilde{\rho}_T(B) := \Psi_T(\chi_B)$ erklärt.

Lemma 4

Die Zuordnung $B \rightarrow \tilde{\rho}_T(B)$ ein σ -additives, B_p -wertiges Maß auf $\Sigma_{\mathbb{R}}$.

Beweis

Für $B \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_T(B) &= \Psi_T(\chi_B) = \chi_B(T) = \\ &= \int \chi_B \rho_f(d\lambda) = \int_B \rho_f(d\lambda) = \rho_f(B)\end{aligned}$$

Bemerkung

Man ersieht aus dem Lemma sofort: Für $T \in C_p(B_p)$ ist ρ_f gerade ρ_T . Dieses Resultat folgt natürlich auch direkt aus Satz 3 und der Tatsache, daß ρ_f eine Zerlegung der Eins zu T ist.

Satz 4

Es sei $T \in C_p^a(B_p)$ und ρ eine Zerlegung der Eins zu T .
Dann ist ρ eindeutig bestimmt.

Beweis (vgl. [D-S] S. 2230)

Seien ρ und ρ_1 zwei Zerlegungen der Eins von T und K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}$. Gemäß Eigenschaft (iv) einer Zerlegung der Eins von T ist die Einschränkung S von T auf $\rho_1(K)X$ aus $C_p(B_p \circ \rho_1(K))$. Eine Zerlegung der Eins von S ist die Einschränkung von ρ_1 auf $\rho_1(K)X$. Sie sei mit ρ_1^K bezeichnet.

Es wird gezeigt, daß die Einschränkung von ρ auf $\rho_1(K)X$, welche mit ρ^K bezeichnet wird, auch eine Zerlegung der Eins von S ist. Ist dies gezeigt, so folgt aus dem Eindeutigkeitsatz 3 sofort: $\rho_1^K = \rho^K$. Dies bedeutet aber ausführlich:

$$\rho(C \cap K) = \rho_1(C \cap K)$$

für jede Borelmenge C . Weil ρ und ρ_1 σ -additiv sind, folgt daraus $\rho = \rho_1$ und das war zu zeigen.

Um zu zeigen, daß ρ^K eine Zerlegung der Eins von S ist, reicht es zu bestätigen, daß das Spektrum der Einschränkung

$$S|_{\rho(C)\rho_1(K)X} = T|_{\rho(C)\rho_1(K)X}$$

ganz in C^- enthalten ist.

Dazu sei $\lambda \notin C^-$. Es folgt, daß $\lambda \text{Id} - T$ ein injektiver Operator von $\rho(K)X$ nach $\rho(K)X$ ist. Es reicht daher zu zeigen, daß für $\lambda \notin C^-$ der Operator $\lambda \text{Id} - T$ den Raum $\rho(C)\rho_1(K)X$ auf sich

abbildet.

Da nach Voraussetzung ρ eine Zerlegung der Eins von T ist, so gilt:

Ist $\lambda \notin C^-$, dann ist:

$$(\lambda \text{Id} - T)(D(T) \cap \rho(C)X) = \rho(C)X$$

und somit:

$$\begin{aligned} \rho_1(K)\rho(C)X &= \rho_1(K)(\lambda \text{Id} - T)(D(T) \cap \rho(C)X) \\ &= (\lambda \text{Id} - T)\rho_1(K)(D(T) \cap \rho(C)X) \\ &\subseteq (\lambda \text{Id} - T)\rho_1(K)\rho(C)X \end{aligned}$$

Man erhält daraus, daß $(\lambda \text{Id} - T)^{-1}$ auf $\rho_1(K)\rho(C)X$ überall definiert ist. Da $(\lambda \text{Id} - T)^{-1}$ abgeschlossen ist, hat man die Aussage, daß $(\lambda \text{Id} - T)^{-1}$ stetig ist. Also: $\lambda \notin \sigma(T/\rho(C)\rho_1(K)X)$.

Untersuchung des gemeinsamen Definitionsbereiches von $C_p^a(B_p)$

Wie schon in der Bemerkung auf S. 20 angedeutet, gibt die Formulierung des Satzes 1 zur Untersuchung der Frage Anlaß, ob es einen gemeinsamen, dichten Definitionsbereich für die Operatoren aus $C_p^a(B_p)$ gibt.

Die folgenden Ausführungen zeigen, daß im allgemeinen dieser gemeinsame Definitionsbereich nicht dicht ist. Zwei Beispiele zeigen, daß sogar die beiden Extremfälle, also einmal existiert ein gemeinsamer, dichter Definitionsbereich, das andere Mal besteht der gemeinsame Definitionsbereich nur aus der Null des Banachraumes, auftreten können.

Zum Abschluß dieses Kapitels wird mit maßtheoretischen Methoden als ein Hauptergebnis dieser Arbeit der gemeinsame Definitionsbereich von $C_p^a(B_p)$ berechnet. Als Anwendung dieses Ergebnisses werden die Banachräume allgemein charakterisiert, für die der gemeinsame Definitionsbereich dicht liegt.

Zunächst wird erst einmal ein Beispiel eines unendlich dimensional Banachraumes angegeben, in welchem der gemeinsame Definitionsbereich dicht liegt.

Beispiel 1

Für X betrachte man den Raum $\ell^p(p \neq 2)$. Als Maßraum (S, Σ) verwende man $S = \mathbb{N}$ und $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Man definiere eine Abbildung:

$$\rho : \Sigma \rightarrow B_p(X)$$

$$\text{durch } \rho(\{k\}) := E_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{und } \rho(\emptyset) := 0$$

und weiter auf ganz Σ durch "Zusammensetzen". Dabei ist

$$E_k x = (0, \dots, 0, x_k, 0, 0, \dots) \text{ wenn } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X.$$

Offensichtlich ist ρ ein Spektralmaß auf Σ , d.h. ein stark σ -additives $B_p(X)$ -wertiges Maß auf Σ .

Nach Definition der Operatorenklasse $C_p^a(B_p(X))$ ist für ein $T \in C_p^a(B_p(X))$ (siehe Vorbereitungen S.11, [Mü] S. 14):

$$D(T) \supseteq \rho(C_n)X$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $C_n := \{1, \dots, n\}$.

Sei $x = (x_1, x_2, \dots)$ eine endliche Folge im X . Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ für $n \geq n_0$. Daher gilt: $D(T) \ni \rho(C_{n_0})x = x$. Man hat insgesamt:

$$\{\text{endliche Folgen in } X\} \subseteq \bigcap \{D(T) \mid T \in C_p^a(B_p(X))\}$$

Da die endlichen Folgen in X dicht liegen, folgt die Behauptung.

Bemerkung: Aus Satz 5 wird sich ergeben, daß bei der obigen Inklusion sogar die Gleichheit gilt.

Für die weiteren Betrachtungen wird ein vorbereitendes Lemma bewiesen.

Definition 5 (siehe [Ha])

(S, Σ, μ) sei ein Maßraum. $A \in \Sigma$ heißt Atom bzgl. (S, Σ, μ) , wenn gilt:

- (i) $\mu(A) > 0$
- (ii) Sei $B \in \Sigma$ und $B \subseteq A$, dann gilt:
 $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = \mu(A)$.

Lemma 5

Es sei (S, Σ, μ) ein Maßraum, $f \in L^P(S, \Sigma, \mu)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $g \cdot f \in L^P(S, \Sigma, \mu)$ für alle $g \in M(S)$
- (ii) $f \in \text{Lin} \{ \chi_A \mid A \text{ Atom in } (S, \Sigma, \mu) \}$.

Beweis

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sei $f \in \text{Lin} \{ \chi_A \mid A \text{ Atom in } (S, \Sigma, \mu) \}$, dann ist $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$,

wobei für $i = 1, \dots, n$ A_i Atome und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ sind. Sei $g \in M(S)$. Die Funktion g ist auf jedem der Atome A_i bis auf eine μ -Nullmenge beschränkt; denn angenommen, es gibt ein A_{i_0} , so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu\{s \mid s \in A_{i_0}, |g(s)| \geq n\} > 0.$$

Da A_{i_0} Atom folgt:

$$\mu\{s \mid s \in A_{i_0}, |g(s)| \geq n\} = \mu(A_{i_0})$$

Es sei:

$$\begin{aligned} A &:= \{s \mid s \in A_{i_0}, |g(s)| \geq n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{s \mid s \in A_{i_0}, |g(s)| = \infty\} \end{aligned}$$

Wegen $\{s \mid s \in A_{i_0}, |g(s)| \geq n\} \neq \emptyset$ folgt $\mu(A) = \mu(A_{i_0}) > 0$ und das ist ein Widerspruch, denn $g \in M(S)$. Die gewünschte Aussage folgt daraus sofort.

$$(i) \Rightarrow (ii)$$

Für $i \in \mathbb{Z}$ sei definiert:

$$(i, i+1] \text{ für } i \geq 0$$

$$A_i := \begin{cases} 1 \\ [i, i+1] \text{ für } i < 0 \end{cases}$$

Die Funktion f sei nicht die (μ) - Nullfunktion.

Es sei:

$$\mathbb{R} := \{A_i \mid \mu(f^{-1}(A_i)) \neq 0, i \in \mathbb{Z}\}$$

Fall 1

$$\text{Card } \mathbb{R} = \aleph_0$$

In diesem Fall läßt sich sofort eine Funktion $g \in M(\mathbb{R})$ angeben, so daß $g \circ f \notin L^p(S, \Sigma, \mu)$; denn sei o.B.d.A $M = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ so setze z.B.

$$g(s) := \frac{1}{f(s)} \left(\frac{1}{i} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\mu(f^{-1}(A_i))}$$

für $s \in A_i$ und 0 sonst. (siehe auch S. 39)

Fall 2

Card $\mathfrak{M} < \aleph_0$

Es sei dann o.B.d.A.: $\mathfrak{M} = \{A_1, \dots, A_k\}$. Der Fall 2 wird durch Unterscheidung in zwei Unterfälle behandelt.

Fall 2a

Alle $B_i := \{s | s \in f^{-1}(A_i)\}$ ($i=1, \dots, k$) sind Atome.

In diesem Fall wähle man ein beliebiges $A_i \in \mathfrak{M}$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ werde dann $(i, i+1]$ in n Teilintervalle I_j^1 ($j=1, \dots, n$) zerlegt. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \mu(\{s | s \in f^{-1}(A_i)\}) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^n \{s | s \in f^{-1}(I_j^1)\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mu(\{s | s \in f^{-1}(I_j^1)\}) \end{aligned}$$

Wegen $\mu(B_i) = \mu(\{s | s \in f^{-1}(A_i)\}) > 0$ gibt es mindestens ein $j_1 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mu(\{s | s \in f^{-1}(I_{j_1}^1)\}) > 0$. Weil B_i ein Atom ist, folgt: $\mu(B_i) = \mu(\{s | s \in f^{-1}(I_{j_1}^1)\})$ und daher:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n \{s | s \in f^{-1}(I_j^1)\}\right) &= 0 \\ j \neq j_1 \end{aligned}$$

Unterteilt man $I_{j_1}^1$ weiter in n -Teilintervalle, so erhält man wieder ein Intervall $I_{j_2}^2$ mit:

$$\mu(B_i) = \mu(\{s | s \in f^{-1}(I_{j_2}^2)\})$$

Setzt man das Verfahren immer weiter fort, dann erhält man eine Folge von Teilintervallen $(I_{j_\ell}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ von A_i , die gemäß Konstruktion folgende Eigenschaften hat:

$$(i) \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i^1 = I_1^1$$

$$(ii) \mu(\{s | s \in f^{-1}(I_{j_q}^1)\}) = \mu(B_i)$$

für alle $l \in \mathbb{N}$

Damit ist für $i \in \{1, \dots, k\}$ gezeigt:

$\mu(\{s | s \in f^{-1}(A_i \setminus \{\lambda_i\})\}) = 0$ und das bedeutet:

$$f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \chi_{\{s | s \in f^{-1}(A_i)\}} \quad \text{also:}$$

$$f \in \text{Lin} \{ \chi_A | A \text{ Atom in } (S, \Sigma, \mu) \}$$

Fall 2b

Es gibt $A_i \in \mathcal{M}$ und $\{s | s \in f^{-1}(A_i)\}$ ist kein Atom in (S, Σ, μ) . Dann existiert $B_i^1 \subsetneq \{s | s \in f^{-1}(A_i)\} =: B_i$ und $0 < \mu(B_i^1) < \mu(B_i)$. Sind B_i^1 und $B_i \setminus B_i^1$ Atome, so kann man wieder (bis auf μ -Nullmenge)

$$f|_{B_i^1} = \lambda_i^1, \quad f|_{B_i \setminus B_i^1} = \lambda_i$$

zeigen, so daß dies im wesentlichen wieder Fall 2a ist. Damit ist also Fall 2b genau der Fall, daß für ein $A_i \in \mathcal{M}$ eine Folge $(B_i^j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

$$(i) B_i^j \subseteq B_i = \{s | s \in f^{-1}(A_i)\}$$

$$(ii) B_i^j \subsetneq B_i^{j+1}$$

$$(iii) 0 < \mu(B_i^{j+1}) < \mu(B_i^j)$$

Für diesen Fall definiere man:

$$g(s) := \begin{cases} \frac{1}{f(s)} \left((1/j) \frac{1}{\mu(B_i^{j+1} \setminus B_i^j)} \right)^{1/p} & \text{für } s \in B_i^j \setminus B_i^{j+1} \\ & j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Definition ersieht man sofort: $g \in M(s)$. Es gilt aber $f \cdot g \notin L^p(S, \Sigma, \mu)$; denn für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \int |f \cdot g|^p d\mu &\geq \sum_{k=1}^n \int_{B_i^k \setminus B_i^{k+1}} |f(s) \cdot \frac{1}{f(s)} \left((1/k) \frac{1}{\mu(B_i^k \setminus B_i^{k+1})} \right)^{1/p} |^p d\mu \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{\mu(B_i^k \setminus B_i^{k+1})} \int_{B_i^k \setminus B_i^{k+1}} d\mu = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

das bedeutet also: $f \cdot g \notin L^p(S, \Sigma, \mu)$ und daher: aus $f \cdot g \in L^p(S, \Sigma, \mu)$ für alle $g \in M(S)$ folgt $f \in \text{Lin}(\chi_A \mid A \text{ Atom in } (S, \Sigma, \mu))$, was zu zeigen war.

Beispiel 2

Es sei $X := L^p(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, \mu_L)$, $p \neq 2$, μ_L Lebesgue Maß. Man wähle dann:

$$\begin{aligned} \rho &: \Sigma \rightarrow B_p(X) \\ C &\mapsto E_C \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} E_C &: X \rightarrow X \\ x &\mapsto x \cdot \chi_C \end{aligned}$$

Es ist ρ ein σ -additives B_p -wertiges Maß, also ein Spektralmaß.

Es wird gezeigt, daß

$$\bigcap_{f \in M(\mathbb{R})} D(T(f)) = \{0\}$$

ist. Dazu sei angenommen, $x \neq 0$ und $x \in \bigcap_{f \in M(\mathbb{R})} D(T(f))$, ferner

sei $g \in M(\mathbb{R})$. Nach [Mü] gilt dann:

$$|g| \in L^p(\mathbb{R}, \rho_x^p), \text{ d.h.: } \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^p \rho_x^p(d\lambda) < \infty \quad (1)$$

Wegen: $\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^p \rho_x^p(d\lambda) = \|T(g)x\|^p$ (2) gilt für $C \in \Sigma_{\mathbb{R}}$:

$$\rho_x^p(C) = \|\rho(C)x\|^p = \|\chi_C \cdot x\|^p$$

$$\text{also: } \rho_x^p(C) = \|\chi_C \cdot x\|^p = \int_{\mathbb{R}} |\chi_C(\lambda) x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) \quad (3)$$

Sei f eine Elementarfunktion und $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}$ eine Normaldarstellung von f . Dann bekommt man:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} |\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |\alpha_i \chi_{C_i}(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \|\alpha_i \chi_{C_i} \cdot x\|^p = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \|\chi_{C_i} \cdot x\|^p$$

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \rho_x^p(C_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |\alpha_i \chi_{C_i}(\lambda)|^p \rho_x^p(d\lambda) =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} |\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{C_i}(\lambda)|^p \rho_x^p(d\lambda) = \|T(f)x\|^p. \quad (2)$$

(Die Gleichheitszeichen $(*)$ gelten wegen $C_i \cap C_j = \emptyset$ für $i \neq j$).

Man hat also für Elementarfunktionen f:

$$\|T(f)x\|^p = \int |f(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) \quad (4)$$

Sei $g \in M(\mathbb{R})$ gegeben und g_n eine isotone Folge von Elementarfunktionen mit $g = \sup g_n$, so folgt wegen $x \in D(T(g))$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) &= \|T(g)x\|^p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(g_n)x\|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |g_n(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) \end{aligned}$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |g_n(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda) =$$

$$(\overline{**}) \quad \int |g(\lambda)x(\lambda)|^p \mu_L(d\lambda)$$

(Das Gleichheitszeichen (**)) gilt aufgrund des "extended monotone convergence theorem" (vgl. z.B. [A] S. 47)).

Wegen (1) ist die letzte Gleichungskette gleichbedeutend mit der Aussage $g \cdot f \in L^p(\mathbb{R}, \mu_L)$. Da $g \in M(\mathbb{R})$ beliebig war, folgt: $x \in \text{Lin}\{\chi_A \mid A \text{ Atom in } (\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, \mu_L)\}$ gemäß Lemma 5. Da $(\mathbb{R}, \Sigma_{\mathbb{R}}, \mu_L)$ keine Atome besitzt, ist dies ein Widerspruch.

Das nächste Ergebnis wird vorbereitet. Einem Ergebnis von Evans zufolge gibt es auf Ω , dem Darstellungsraum zu B_p , ein perfektes Maß m , das heißt ein Borelmaß auf Ω mit den Eigenschaften:

- (i) Jede nichtleere offen- abgeschlossene Menge besitzt positives Maß.
- (ii) Jedenirgends dichte Menge ist eine Nullmenge
- (iii) Jede nichtleere offen- abgeschlossene Menge enthält eine andere mit endlichem Maß.

Jedes $x \in X$ definiert ein Borelmaß m_x auf Ω durch die Zuordnung

$$m_x(B) := \inf\{\|E_D x\|^p \mid D \text{ clopen}, D \supset B\}$$

für abgeschlossene $B \subseteq \Omega$. Jedes m_x hat eine Ableitung bzgl. m , ausführlich: Es gibt eine $L^1(m)$ -Funktion f_x mit: $m_x = f_x m$. Da m_x positiv ist, so kann f_x positiv gewählt werden. Es wird eine Abbildung $[\cdot]$ von X nach $L^p(m)^+$ definiert durch: $[x] := (f_x)^{1/p}$. Unter anderem hat $[\cdot]$ folgende Eigenschaft: $\|[x]\|_p^p = \|x\|^p$ für $x \in X$. Für diese Ergebnisse siehe [Ev], [FPS].

Satz 5

Für einen $\mathbb{R}$ -Banachraum gilt die Äquivalenz:

- (i) $x \in \bigcap_{f \in M(\Omega)} D(T(f))$
- (ii) $[x] \in \text{Lin}\{\chi_A \mid A \text{ Atom in } (\Omega, \Sigma_\Omega, m)\}$

Beweis

Für D offen- abgeschlossen gilt nach Definition von ρ_x^p und m_x :

$$m_x(D) = \|E_D x\|^p = \|\rho(D)x\|^p = \rho_x^p(D)$$

das heißt, für alle $x \in X$ ist $m_x = \rho_x^p$.

Es sei jetzt $x \in \bigcap_{f \in M(\Omega)} D(T(f))$. Dazu ist äquivalent:

- (1) $f \in L^p(\Omega, \rho_x^p)$, d.h.: $\int |f^p(\omega)| \rho_x^p(d\omega) < \infty$ für alle $f \in M(\Omega)$.

Daraus folgt wegen:

$$\int |f^p(\omega)| \rho_x^p(d\omega) = \int |f(\omega)|^p m_x(d\omega)$$

$$(2) \quad \int_{(*)} [x]^P |f(\omega)|^P m(d\omega) = \int |[x]f(\omega)|^P m(d\omega)$$

(Das Gleichheitszeichen $(*)$ gilt, da m_x Ableitung bzgl. m mit der Dichte $[x]^P$ ist, vgl. auch [Bau] S. 73) mit (1) sofort:

$x \in \bigcap_{f \in M(\Omega)} D(T(f))$ ist äquivalent zu $[x] \cdot f \in L^P(\Omega, m)$ für $f \in M(\Omega)$.

Da $[x] \in L^P(\Omega, m)$ ist, erhält durch Anwendung von Lemma 5, das ja

natürlich auch für den Maßraum $(\Omega, \Sigma_\Omega, m)$ gilt: $x \in \bigcap_{f \in M(\Omega)} D(T(f))$

ist äquivalent zu $[x] \in \text{Lin}\{\chi_A \mid A \text{ Atom in } (\Omega, \Sigma_\Omega, m)\}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Da $\| [x] \|_P^P = \| x \|_P^P$ erhält man als Folgerung direkt:

Korollar 2

Unter den Voraussetzungen des Satzes 5 ist äquivalent:

$$(i) \quad \left(\bigcap_{f \in M(\Omega)} D(T(f)) \right)^- = X$$

$$(ii) \quad \begin{array}{ll} \wedge & \forall x_0 \quad \| x - x_0 \| < \varepsilon \\ x \in X & \\ \varepsilon > 0 & [x_0] \in \text{Lin}\{\chi_A \mid A \text{ Atom in } (\Omega, \Sigma, m)\} \end{array}$$

Charakterisierung von $C_p^a(B_p)$

Die Operatorenklasse $C_p(B_p)$ ist dadurch charakterisiert, daß sie genau die Operatoren aus $[X]$ enthält, welche die B_p -Zykel fest lassen (vgl. [Ba]). Es wird gezeigt, daß unter einer Zusatzvoraussetzung eine ähnliche Charakterisierung von $C_p^a(B_p)$ gelingt. Diese Zusatzvoraussetzung sieht zunächst sehr stark aus, aber in einem Gegenbeispiel wird gezeigt, daß sie notwendig ist.

Satz 6

Es sei $T : X \rightarrow X$, linear, abgeschlossen, dicht definiert und es gelte:

- (i) $\bigwedge_{x \in X} T(S(x, B_p) \cap D(T)) \subseteq S(x, B_p)$
- (ii) $[\bigcup_{i \in I} J_i]^\perp = X$. Dabei ist $\{J_i \mid i \in I\}$ eine geeignete aufsteigend filtrierende Familie von L^p -Summanden J_i von X mit $J_i \subseteq D(T)$.

Dann gibt es $\tilde{T} \subseteq T$ mit $\tilde{T} \in C_p^a(B_p)$.

Beweis

Die den J_i entsprechenden B_p -Projektionen seien E_i genannt. Es sei $\rho = \rho_p$ das natürliche Borelmaß auf Ω . Für $i \in I$ werde $V_i := \rho^{-1}(E_i)$ gesetzt. Weiter sei U_i die zu V_i gehörende offen-abgeschlossene Menge mit $\rho(U_i) = \rho(V_i)$. Nach Voraussetzung ist $T^i := T/\rho(U_i)X$ und außerhalb von $\rho(U_i)X$ durch Null fortgesetzt

aus $C_p(B_p)$. Wegen $T^i|_{\rho(V_j)} = T^j$ für $i \geq j$ gilt: $\hat{T}^i|_{\chi_{U_j}} = \hat{T}^j$ für $i \geq j$. Dabei ist $\hat{T}$ die $T \in C_p(B_p)$ ansprechende stetige Funktion auf Ω . Man definiere nun

$$\hat{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

durch:

$$\hat{T}_\omega := \begin{cases} \hat{T}^i(\omega) & |\omega \in U_i \\ 0 & |\omega \in \Omega \setminus \bigcup_{i \in I} U_i \end{cases}$$

Da $\hat{T}^i$ stetig und $\Omega \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ offen - abgeschlossen ist, ist $\hat{T}$ meßbar. Sei dann für $n \in \mathbb{N}$:

$$\hat{T}_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\hat{T}_n(\omega) := \begin{cases} \hat{T}(\omega) & \text{wenn } |T(\omega)| \leq n \\ 0 & \text{wenn } |T(\omega)| > n \end{cases}$$

definiert. Der Operator:

$$\tilde{T} : X \rightarrow X$$

$$\tilde{T}_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{T}_n(\omega) \rho(d\omega) x \quad \text{für } x \in D(\tilde{T})$$

$$D(\tilde{T}) := \{x | x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \int \hat{T}_n(\omega) \rho(d\omega) x \text{ existiert}\}$$

ist nach Definition aus $C_p^a(B_p)$. Es ist nur noch $\tilde{T} \subseteq T$ zu zeigen.

Sei dazu $x \in D(\tilde{T})$, dann gilt:

$$\tilde{T}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_n x \quad (\tilde{T}_n = \tilde{T}/\rho(T^{-1}[-n, n]))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \tilde{T}_n \lim_{j \rightarrow \infty} E_{i_j} x \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{T}_n E_{i_j} x \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{U_{i_j}} \tilde{T}_n(\omega) \rho(d\omega) x \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{U_{i_j} \cap \hat{T}^{-1}([-n, n])} \hat{T}(\omega) \rho(d\omega) x \}$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} T \rho(U_{i_j}) \rho(\hat{T}^{-1}([-n, n])) x \}$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} T \rho(U_{i_j}) (\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\hat{T}^{-1}([-n, n])) x)$$

(Das Gleichheitszeichen * gilt, da $\|\rho(C)\| \leq 1$ für alle $C \in \Sigma_n$).

Aus der eben gemachten Betrachtung ersieht man:

$$Tx = \lim_{j \rightarrow \infty} T \rho(U_{i_j}) x \text{ für } x \in D(\tilde{T})$$

Für $x_j = \rho(U_{i_j}) x$ ($j \in \mathbb{N}$) ist daher:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Tx_j = \tilde{T}x$$

Da T abgeschlossen nach Voraussetzung ist, gilt: $x \in D(T)$ und $\tilde{T}x = Tx$.

Für einen abgeschlossenen Cunningham-p-Operator ist nach Definition $\rho_T([-n, n])x \subseteq D(T)$ für $n \in \mathbb{N}$, wenn ρ_T die Zerlegung der Eins von T ist. Außerdem gilt für $T \in C_p^a(B_p)$: $T(S(x, B_p) \cap D(T)) \subseteq S(x, B_p)$ für alle $x \in X$. Daher ergibt sich aus dem Satz sofort folgende Charakterisierung:

Korollar 3

Es sei T ein abgeschlossener, dicht definierter, linearer Operator von X nach X . Es sind äquivalent:

- (i) Es existiert $\tilde{T} \in C_p^a(B_p)$ mit $\tilde{T} \subseteq T$
- (ii) Es gibt $\bar{T} \subseteq T$ mit: $\bigwedge_{x \in X} \bar{T}(S(x, B_p) \cap D(\bar{T})) \subseteq S(x, B_p)$ und $\left[\bigcup_{i \in I} J_i \right]^- = X$ für eine geeignete aufsteigend filtrierende Familie $\{J_i | i \in I\}$ von L^p -Summanden J_i mit $J_i \subseteq D(\bar{T})$.

Gegenbeispiel

$$X := L^p(I, \mu_L) \quad (1 \leq p < \infty, p \neq 2).$$

Dabei sei I ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$.

Weiterhin seien:

$$A_1(I) := \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ ist absolutstetig in jedem kompakten Intervall } I\}$$

Für $f \in A_1(I)$ sei $\tau f := Df$ (= Derivierte von f)

Der Operator T werden nun so definiert:

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X \\ D(T) &:= \{f | f \in A_1(I) \cap L^p(I), \tau f \in L^p(I)\} \\ Tf &:= \tau f = Df \quad (f \in D(T)) \end{aligned}$$

Dieser Operator hat folgende Eigenschaften:

a) T ist linear

b) T ist abgeschlossen

(s. [Go] S. 134)

c) T ist dicht definiert

$$\mathfrak{S}_1(I) \subseteq D(T) \text{ und } \mathfrak{S}_1(I)^- = X \quad (*)$$

*) $\mathfrak{S}_1(I) = \{f | f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig differenzierbar}\}$

d) $T(S(f, B_p) \cap D(T)) \subset S(f, B_p)$ für alle $f \in X$

Sei dazu $h \in S(f, B_p) \cap D(T)$, das heißt $h(f) = 0$ für $t \notin B$,
 B meßbare Menge. Zu zeigen: $Th(t) = 0$ für $t \notin B$. (f.ü.)

Beweis: Annahme: In $I \setminus B$ gibt es meßbare Mengen A mit $\mu(A) > 0$
 und $h' \neq 0$ auf A . Da $\mu(A) > 0$, muß es in A Häufungspunkt t_0 geben.
 (o.B.d.A. sei auf A schon die Menge vom Maß Null entfernt, in der h' nicht existiert.

Fall 1 $h(t_0) \neq 0$ W! ($h(t_0) = 0$ nach Voraussetzung)

Fall 2 $h(t_0) = 0$. Es folgt $h(t) \neq 0$ in einer Umgebung von t_0 .
 W! (denn in jeder Umgebung von t_0 liegen überabzählbar viele $t \in A$ und dort war $h = 0$.)

e) $[U\{J|J L^P\text{-Summand}, D(T) \supset J\}]^- \neq X$

Dazu wird gezeigt: Kein L^P -Summand liegt in $D(T)$.

Sei X_S L^P -Summand, dann gibt es eine meßbare Menge C mit

$$X_S = \{f \chi_C \mid f \in L^P\}$$

Wähle abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $\mu(C \cap [a, b]) > 0$ für
 den Fall, daß $\mu(C) > 0$. Wähle weiter f auf $[a, b]$ stetig aber
 nirgends differenzierbar und $f|_{\mathbb{R} \setminus [a, b]} = 0$.

Aufgrund der Stetigkeit von f ist $f \cdot \chi_C \in L^P(\mu)$, aber
 $f \chi_C \notin D(T)$, denn f' existiert nicht auf einer Menge positiven
 Maßes in C .

Dieses Beispiel stellt einen Operator vor, der abgeschlossen,
 dicht definiert, linear ist, sowie die Zykel fest läßt, der aber
 kein abgeschlossener Cunningham-p-Operator ist.

6. Literaturverzeichnis

- [A] Robert B. Ash: Measure, Integration and Functional Analysis; Academic Press, New York and London 1972.
- [A-E] E.M. Alfsen- E.G. Effros: Structure in real Banach-spaces, Ann. of Math. 96 (1972) Part I: 98-128, Part II: 129-173.
- [Ba] William G. Bade: On Boolean Algebras of Projections and Algebras of Operators, Trans. of the AMS 80 (1955), 345-360.
- [Bau] Heinz Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, Walter de Gruyter u. Co. Berlin 1968.
- [Be1] Ehrhard Behrends: L^P -Struktur in Banachräumen, Studia Math. 55 (1976) 71-85.
- [Be2] Ehrhard Behrends: L^P -Struktur in Banachräumen II, Studia Math. 62 (erscheint demnächst)
- [CS] H.B. Cohen- F.E. Sullivan: Projections onto cycles in smooth reflexive Banach spaces, Pac. Journal of Math. 34 (1970) 355-364.
- [DS] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz: Linear Operators, Part III, Wiley Interscience, New York-London-Sydney-Toronto (1971).

[Ev] Richard Evans: Projektionen mit Normbedingungen in reellen Banachräumen. Dissertation, Freie Universität Berlin 1974.

[FPS] Forschungsprojektschwerpunkt: Strukturtheorie reeller und komplexer Banachräume: L^p -Structure in real Banachspaces, erscheint demnächst als Lecture Notes.

[Go] Seymour Goldberg: Unbounded linear Operators Mc Graw Hill Book Company, New York 1966.

[Ha] Paul R. Halmos: Measure theory, Van Nostrand Reinhold Company, New York 1950.

[Mü] Winfried Müller: Abgeschlossene Cunningham-p-Operatoren, Dissertation, Freie Universität Berlin 1977.

Lebenslauf

Klaus Peter Walter Hügin, geb. 25.2.1949 in Berlin - Köpenick.

Vater Walter Hügin, Steuerbevollmächtigter

Mutter Elfriede Hügin, Stenotypistin

Besuch der Grundschule von 1955 bis 1961. Von 1961 bis 1963 Schüler der Dag Hammarsköld Schule in Tempelhof (Oberschule Technischen Zweiges). 1963 Wechsel zur Robert Koch Schule. Abitur am mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig dieser Schule Ostern 1968.

Immatrikulation an der Freien Universität Berlin im Sommer-Semester 1968 in den Fächern Mathematik und Physik. Akademische Lehrer im Fach Mathematik waren insbesondere die Professoren Behrends, Grote-meyer und Pachale. Seit dem Sommer-Semester 1970 studentische Hilfskraft am II. Mathematischen Institut. Am 8.6.1973 bestandene Diplomprüfung im Fach Mathematik. Seit 1.4.1974 Teilzeit-Assistent am I. Mathematischen Institut des Fachbereichs 19 der Freien Universität Berlin.



